Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

In einer jüngst in diesen Berichten erschienenen Arbeit, habe ich Feldgleichungen der Gravitation aufgestellt, welche bezüglich beliebiger Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind. In einem Nachtrage habe ich gezeigt, daß jenen Feldgleichungen allgemein kovariante entsprechen, wenn der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet, und ich habe dargetan, daß der Einführung dieser Hypothese, durch welche Zeit und Raum der letzten Spur objektiver Realität beraubt werden, keine prinzipiellen Bedenken entgegenstehen[1].

In der vorliegenden Arbeit finde ich eine wichtige Bestätigung dieser radikalsten Relativitätstheorie; es zeigt sich nämlich, daß sie die von Leverrier entdeckte säkulare Drehung der Merkurbahn im Sinne der Bahnbewegung, welche etwa 45″ im Jahrhundert beträgt qualitativ und quantitativ erklärt, ohne daß irgendwelche besondere Hypothese zugrunde gelegt werden müßte[2].

Es ergibt sich ferner, daß die Theorie eine stärkere (doppelt so starke) Lichtstrahlenkrümmung durch Gravitationsfelder zur Konsequenz hat als gemäß meinen früheren Untersuchungen.

---

[1] In einer bald folgenden Mitteilung wird gezeigt werden, daß jene Hypothese entbehrlich ist. Wesentlich ist nur, daß eine solche Wahl des Bezugssystems möglich ist, daß die Determinante $|g_{\mu\nu}|$ den Wert -1 annimmt. Die nachfolgende Untersuchung ist hiervon unabhängig.

[2] Über die Unmöglichkeit, die Anomalien der Merkurbewegung auf der Basis der Newtonschen Theorie befriedigend zu erklären, schrieb E. Freundlich jüngst einen beachtenswerten Aufsatz (Astr. Nachr. 4803, Bd. 201. Juni 1915).

§ 1. Das Gravitationsfeld.

Aus meinen letzten beiden Mitteilungen geht hervor, daß das Gravitationsfeld im Vakuum bei geeignet gewähltem Bezugssystem folgenden Gleichungen zu genügen hat

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \qquad (1)$$

wobei die $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ durch die Gleichung definiert sind

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} = -\sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \beta \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} \right). \qquad (2)$$

Machen wir außerdem die in der letzten Mitteilung begründete Hypothese, daß der Skalar des Energietensors der »Materie« stets verschwinde, so tritt hierzu die Determinantengleichung

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \qquad (3)$$

Es befinde sich im Anfangspunkt des Koordinatensystems ein Massenpunkt (die Sonne). Das Gravitationsfeld, welches dieser Massenpunkt erzeugt, kann aus diesen Gleichungen durch sukzessive Approximation berechnet werden.

Es ist indessen wohl zu bedenken, daß die $g_{\mu\nu}$ bei gegebener Sonnenmasse durch die Gleichungen (1) und (3) mathematisch noch nicht vollständig bestimmt sind. Es folgt dies daraus, daß diese Gleichungen bezüglich beliebiger Transformationen mit der Determinante 1 kovariant sind. Es dürfte indessen berechtigt sein, vorauszusetzen, daß alle diese Lösungen durch solche Transformationen aufeinander reduziert werden können, daß sie sich also (bei gegebenen Grenzbedingungen) nur formell, nicht aber physikalisch voneinander unterscheiden. Dieser Überzeugung folgend begnüge ich mich vorerst damit, hier eine Lösung abzuleiten, ohne mich auf die Frage einzulassen, ob es die einzig mögliche sei.

Wir gehen nun in solcher Weise vor. Die $g_{\mu\nu}$ seien in »nullter Näherung« durch folgendes, der ursprünglichen Relativitätstheorie entsprechende Schema gegeben

$$\left. \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix} \right\}, \qquad (4)$$

oder kürzere

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= \delta_{\rho\sigma} \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0 \\ g_{44} &= 1 \end{aligned} \right\}. \qquad (4a)$$

Hierbei bedeuten ρ und σ die Indizes 1, 2, 3; $\delta_{\rho\sigma}$ ist gleich 1 oder 0, je nachdem $\rho = \sigma$ oder $\rho \neq \sigma$ ist.

Wir setzen nun im folgenden voraus, daß sich die $g_{\mu\nu}$ von den in (4a) angegebenen Werten nur um Größen unterscheiden, die klein sind gegenüber der Einheit. Diese Abweichungen behandeln wir als kleine Größen »erster Ordnung«, Funktionen $n$ten Grades dieser Abweichungen als »Größen $n$ter Ordnung«. Die Gleichungen (1) und (3) setzen uns in den Stand, von (4a) ausgehend, durch sukzessive Approximation das Gravitationsfeld bis auf Größen $n$ter Ordnung genau zu berechnen. Wir sprechen in diesem Sinne von der »$n$ten Approximation«; die Gleichungen (4a) bilden die »nullte Approximation«.

Die im folgenden gegebene Lösung hat folgende, das Koordinatensystem festlegende Eigenschaften:

1. Alle Komponenten sind von x_4 unabhängig.
2. Die Lösung ist (räumlich) symmetrisch um den Anfangspunkt des Koordinatensystems, in dem Sinne, daß man wieder auf dieselbe Lösung stößt, wenn man sie einer linearen orthogonalen (räumlichen) Transformation unterwirft.
3. Die Gleichungen $g_{\varrho 4} = g_{4\varrho} = 0$ gelten exakt (für $\varrho = 1$ bis 3).
4. Die $g_{\mu\nu}$ besitzen im Unendlichen die in (4a) gegebenen Werte.

Erste Approximation.

Es ist leicht zu verifizieren, daß in Größen erster Ordnung den Gleichungen (1) und (3) sowie den eben genannten 4 Bedingungen genügt wird durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} g_{\varrho\sigma} &= -\delta_{\varrho\sigma} + \alpha\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\varrho \partial x_\sigma} - \frac{\delta_{\varrho\sigma}}{r}\right) = -\delta_{\varrho\sigma} - \alpha\frac{x_\varrho x_\sigma}{r^3} \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r} \end{aligned}\right\} . \tag{4b}$$

Die $g_{4\varrho}$ bzw. $g_{\varrho 4}$ sind dabei durch Bedingung 3 festgelegt. r bedeutet die Größe $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, α eine durch die Sonnenmasse bestimmte Konstante.

Daß (3) in Gliedern erster Ordnung erfüllt ist, sieht man sogleich. Um in einfacher Weise einzusehen, daß auch die Feldgleichungen (1) in erster Näherung erfüllt sind, braucht man nur zu beachten, daß bei Vernachlässigung von Größen zweiter und höherer Ordnung die linke Seite der Gleichungen (1) sukzessive durch

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{bmatrix}$$

versetzt werden kann, wobei α nur von 1—3 läuft.

Wie man aus (4b) ersieht, bringt es unsere Theorie mit sich, daß im Falle einer ruhenden Masse die Komponenten g_{11} bis g_{33} bereits in den Größen erster Ordnung von null verschieden sind. Wir werden später sehen, daß hierdurch kein Widerspruch gegenüber NEWTONS Gesetz (in erster Näherung) entsteht. Wohl aber ergibt sich hieraus ein etwas anderer Einfluß des Gravitationsfeldes auf einen Lichtstrahl als nach meinen früheren Arbeiten; denn die Lichtgeschwindigkeit ist durch die Gleichung

$$\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0 \qquad (5)$$

bestimmt. Unter Anwendung von HUYGENS' Prinzip findet man aus (5) und (4b) durch eine einfache Rechnung, daß ein an der Sonne im Abstand Δ vorbeigehender Lichtstrahl eine Winkelablenkung von der Größe $\frac{2\alpha}{\Delta}$ erleidet, während die früheren Rechnungen, bei welchen die Hypothese $\sum T_\mu^\mu = 0$ nicht zugrunde gelegt war, den Wert $\frac{\alpha}{\Delta}$ ergeben hatten. Ein an der Oberfläche der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl soll eine Ablenkung von 1.7″ (statt 0.85″) erleiden. Hingegen bleibt das Resultat betreffend die Verschiebung der Spektrallinien durch das Gravitationspotential, welches durch Herrn FREUNDLICH an den Fixsternen der Größenordnung nach bestätigt wurde, ungeändert bestehen, da dieses nur von g_{44} abhängt.

Nachdem wir die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung erlangt haben, können wir auch die Komponenten $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ des Gravitationsfeldes in erster Näherung berechnen. Aus (2) und (4b) ergibt sich

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\tau = -\alpha\left(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{x_\rho x_\sigma x_\tau}{r^5}\right), \qquad (6a)$$

wobei ρ, σ, τ irgendwelche der Indizes 1, 2, 3 bedeuten,

$$\Gamma_{44}^\sigma = \Gamma_{4\sigma}^4 = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}, \qquad (6b)$$

wobei σ den Index 1, 2 oder 3 bedeutet. Diejenigen Komponenten, in welchen der Index 4 einmal oder dreimal auftritt, verschwinden.

Zweite Approximation.

Es wird sich nachher ergeben, daß wir nur die drei Komponenten Γ_{44}^σ in Größen zweiter Ordnung genau zu ermitteln brauchen, um die Planetenbahnen mit dem entsprechenden Genauigkeitsgrade ermitteln zu können. Hierfür genügt uns die letzte Feldgleichung zuammen mit den allgemeinen Bedingungen, welche wir unserer Lösung uferlegt haben. Die letzte Feldgleichung

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma^\sigma_{44}}{\partial x_\sigma} + \sum_{\sigma\tau} \Gamma^\sigma_{4\tau} \Gamma^\tau_{4\sigma} = 0$$

eht mit Rücksicht auf (6b) bei Vernachlässigung von Größen dritter nd höherer Ordnung über in

$$\sum_\sigma \frac{\Gamma^\sigma_{44}}{\partial x_\sigma} = \frac{\alpha^2}{2r^4}.$$

Iieraus folgern wir mit Rücksicht auf (6b) und die Symmetrieeigenchaften unserer Lösung

$$\Gamma^\sigma_{44} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\sigma}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \qquad (6c)$$

§ 2. Die Planetenbewegung.

Die von der allgemeinen Relativitätstheorie gelieferten Bewegungsleichungen des materiellen Punktes im Schwerefelde lauten

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau} \Gamma^\nu_{\sigma\tau} \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}. \qquad (7)$$

Aus diesen Gleichungen folgern wir zunächst, daß sie die NEWTONchen Bewegungsgleichungen als erste Näherung enthalten. Wenn ämlich die Bewegung des Punktes mit gegen die Lichtgeschwindigkeit kleiner Geschwindigkeit stattfindet, so sind dx_1, dx_2, dx_3 klein gegen dx_4. Folglich bekommen wir eine erste Näherung, indem wir uf der rechten Seite jeweilen nur das Glied $\sigma = \tau = 4$ berücksichigen. Man erhält dann mit Rücksicht auf (6b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} &= \Gamma^\nu_{44} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3} (\nu = 1, 2, 3) \\ \frac{d^2 x_4}{ds^2} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7a)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man für eine erste Näherung $s = x_4$ setzen kann. Dann sind die ersten drei Gleichungen genau die NEWTONschen. Führt man in der Bahnebene Polargleichungen r, ϕ ein, so liefern der Energie- und der Flächensatz bekanntlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}u^2 + \Phi &= A \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

wobei A und B die Konstanten des Energie- bzw. Flächensatzes bedeuten, wobei zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= -\frac{\alpha}{2r}\\ u^2 &= \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2}\end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

gesetzt ist.

Wir haben nun die Gleichungen (7) um eine Größenordnung genauer auszuwerten. Die letzte der Gleichungen (7) liefert dann zusammen mit (6b)

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 2\sum_\sigma \Gamma^4_{\sigma 4} \frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_4}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds}\frac{dx_4}{ds}$$

oder in Größen erster Ordnung genau

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \tag{9}$$

Wir wenden uns nun zu den ersten drei Gleichungen (7). Die rechte Seite liefert

a) für die Indexkombination $\sigma = \tau = 4$

$$\Gamma^\nu_{44}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2$$

oder mit Rücksicht auf (6c) und (9) in Größen zweiter Ordnung genau

$$-\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right),$$

b) für die Indexkombinationen $\sigma \neq 4$ $\tau \neq 4$ (welche allein noch in Betracht kommen) mit Rücksicht darauf, daß die Produkte $\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}$ mit Rücksicht auf (8) als Größen erster Ordnung anzusehen sind[1], ebenfalls auf Größen zweiter Ordnung genau

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\sum_{\sigma\tau}\left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2}\frac{x_\sigma x_\tau}{r^2}\right)\frac{dx_\sigma}{ds}\frac{dx_\tau}{ds}.$$

Die Summation ergibt

$$-\frac{\alpha x_\nu}{r^3}\left(u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right).$$

[1] Diesem Umstand entsprechend können wir uns bei den Feldkomponenten $\Gamma^\nu_{\sigma\tau}$ mit der in Gleichung (6a) gegebenen ersten Näherung begnügen.

Mit Rücksicht hierauf erhält man für die Bewegungsgleichungen die in Größen zweiter Ordnung genaue Form

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha}{2}\frac{x_\nu}{r^3}\left(1 + \frac{\alpha}{r} + 2u^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right), \tag{7b}$$

welche zusammen mit (9) die Bewegung des Massenpunktes bestimmt. Nebenbei sei bemerkt, daß (7b) und (9) für den Fall der Kreisbewegung keine Abweichungen vom dritten KEPLERschen Gesetze ergeben.

Aus (7b) folgt zunächst die exakte Gültigkeit der Gleichung

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = B, \tag{10}$$

wobei B eine Konstante bedeutet. Der Flächensatz gilt also in Größen zweiter Ordnung genau, wenn man die »Eigenzeit« des Planeten zur Zeitmessung verwendet. Um nun die säkulare Drehung der Bahnellipse aus (7b) zu ermitteln, ersetzt man die Glieder erster Ordnung in der Klammer der sechsten Seite am vorteilhaftesten vermittels (10) und der ersten der Gleichungen (8), durch welches Vorgehen die Glieder zweiter Ordnung auf der rechten Seite nicht geändert werden. Die Klammer nimmt dadurch die Form an

$$\left(1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2}\right).$$

Wählt man endlich $s\sqrt{1-2A}$ als Zeitvariable, und nennt man letztere wieder s, so hat man bei etwas geänderter Bedeutung der Konstanten B:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \\ \Phi &= -\frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{B^2}{r^2}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{7c}$$

Bei der Bestimmung der Bahnform geht man nun genau vor wie im NEWTONschen Falle. Aus (7c) erhält man zunächst

$$\frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung ds mit Hilfe von (10), so ergibt sich, indem man mit x die Größe $\frac{1}{r}$ bezeichnet:

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3, \tag{11}$$

welche Gleichung sich von der entsprechenden der NEWTONschen Theorie nur durch das letzte Glied der rechten Seite unterscheidet.

Der vom Radiusvektor zwischen dem Perihel und dem Aphel beschriebene Winkel wird demnach durch das elliptische Integral

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} x - x^2 + \alpha x^3}},$$

wobei α_1 und α_2 diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} x - x^2 + \alpha x^3 = 0$$

bedeuten, welchen sehr benachbarte Wurzeln derjenigen Gleichung entsprechen, die aus dieser durch Weglassen des letzten Gliedes entsteht.

Hierfür kann mit der von uns zu fordernden Genauigkeit gesetzt werden

$$\phi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}},$$

oder nach Entwicklung von $(1 - \alpha x)^{-\frac{1}{2}}$

$$\phi = [1 + \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2} x\right) dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}.$$

Die Integration liefert

$$\phi = \pi \left[1 + \frac{3}{4} \alpha (\alpha_1 + \alpha_2)\right],$$

oder, wenn man bedenkt, daß α_1 und α_2 die reziproken Werte der maximalen bzw. minimalen Sonnendistanz bedeuten,

$$\phi = \pi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a(1-e^2)}\right). \tag{12}$$

Bei einem ganzen Umlauf rückt also das Perihel um

$$\varepsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1-e^2)} \tag{13}$$

im Sinne der Bahnbewegung vor, wenn mit a die große Halbachse, mit e die Exzentrizität bezeichnet wird. Führt man die Umlaufszeit T

(in Sekunden) ein, so erhält man, wenn c die Lichtgeschwindigkeit in cm/sec. bedeutet:

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}. \qquad (14)$$

Die Rechnung liefert für den Planeten Merkur ein Vorschreiten des Perihels um 43″ in hundert Jahren, während die Astronomen 45″ ± 5″ als unerklärten Rest zwischen Beobachtungen und NEWTONscher Theorie angeben. Dies bedeutet volle Übereinstimmung.

Für Erde und Mars geben die Astronomen eine Vorwärtsbewegung von 11″ bzw. 9″ in hundert Jahren an, während unsere Formel nur 4″ bzw. 1″ liefert. Es scheint jedoch diesen Angaben wegen der zu geringen Exzentrizität der Bahnen jener Planeten ein geringer Wert eigen zu sein. Maßgebend für die Sicherheit der Konstatierung der Perihelbewegung ist ihr Produkt mit der Exzentrizität $\left(e\frac{d\pi}{dt}\right)$. Betrachtet man die für diese Größe von NEWCOMB angegebenen Werte

	$e\frac{d\pi}{dt}$
Merkur	8.48″ ± 0.43
Venus	−0.05 ± 0.25
Erde	0.10 ± 0.13
Mars	0.75 ± 0.35,

welche ich Hrn. Dr. FREUNDLICH verdanke, so gewinnt man den Eindruck, daß ein Vorrücken des Perihels überhaupt nur für Merkur wirklich nachgewiesen ist. Ich will jedoch ein endgültiges Urteil hierüber gerne den Fachastronomen überlassen.