

Das Reflektionsgesetz der speziellen Relativitätstheorie

Dr.-Ing. Wolfgang Lange

3. Februar 2014

Spezielle Relativitätstheorie, LORENTZ, EINSTEIN, Ortskurven, Dreieck, Ellipse, Hyperbel.

Special relativity, LORENTZ, EINSTEIN, locus curves, triangle, ellipse, hyperbola.

Der Versuch von MICHELSON und MORLEY [8, 6, 5] zum Nachweis eines Ätherwindes und die spezielle Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN [4] beruhen beide auf der Reflexion von Licht an Spiegeln. Während MICHELSON seinen Versuch praktisch mit einer auf der Erde fixierten Apparatur durchführte, ist EINSTEINS Idee lediglich mit einem Gedankenversuch entstanden. Wenn man EINSTEINS Artikel von 1905 von allen unnötigen Worten und den bewegten Uhren befreit, besteht der statische Teil aus einem Sender, einem Spiegel und einem Empfänger, die auf einer Geraden angeordnet sind. WEYL erweiterte diesen Gedankenversuch auf eine Anordnung im Dreieck. Dieser Artikel analysiert die Geometrie der Anordnung.

The experiment of MICHELSON and MORLEY for detecting an ether wind and the special theory of relativity by ALBERT EINSTEIN are both based on the reflection of light with mirrors. While MICHELSON's experiment practically carried out with a fixed appliance on Earth, EINSTEIN's idea is only created with a thought experiment. When EINSTEIN's article of 1905 will be free from all unnecessary words and the moved clocks, it is the static part of a source, a mirror, and a receiver, which are arranged on a straight line. WEYL turned this thought experiment on a triangle arrangement. This article analyzes the geometry of the arrangement.

1 Das Weylsche Dreieck

Bei der Beschreibung des EINSTEINSchen Relativitätsprinzips schreibt HERMANN WEYL [10] § 22, S. 158:

“Fizeaus Methode der direkten irdischen Messung beruht auf dem einfachen Gedanken, die Empfangsstation mit der Sendestation A zusammenfallen zu lassen und den Lichtstrahl von A nach B durch Spiegelung in B nach A zurückzuleiten. Es stellt sich heraus, daß die zwischen Abgang und Ankunft des Lichtsignals in A verfllossene Zeit τ proportional zur Entfernung $|AB|$ ist; der Proportionalitätsfaktor c dieses Gesetzes

$$\tau = \frac{2 \cdot |AB|}{c}$$

ist die Lichtgeschwindigkeit.”

Weiter heißt es:

“Es seien A_1OA_2 drei feste Punkte der Erde, welche ihre Bewegung mitmachen; sie mögen in gerader Linie, und zwar in der Bewegungsrichtung mitmachen; sie mögen in gerader Linie, und zwar in der Bewegungsrichtung der Erde, in gleichem Abstand $A_1O = OA_2 = l$ aufeinanderfolgen, und v sei die Translationsgeschwindigkeit der Erde durch den Äther; $\frac{v}{c} = q$ ist (voraussichtlich) sehr klein. Ein in O aufgegebenes Lichtsignal wird in A_2 nach Ablauf

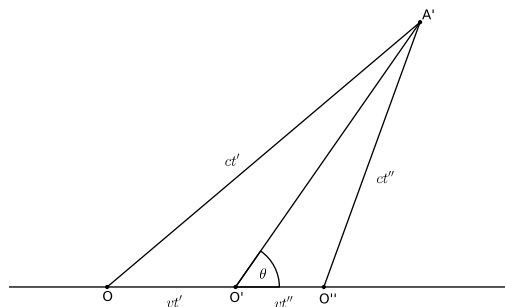


Abbildung 1: Diagramm nach WEYL

der Zeit $\frac{l}{c-v}$, in A_1 nach Ablauf der Zeit

$\frac{l}{c+v}$ eintreffen. Leider kann man diesen Umstand nicht konstatieren, wegen der Schwierigkeit der direkten Zeitübertragung. Wir helfen uns durch den Fizeauschen Gedanken: wir bringen in A_1 und A_2 je einen kleinen Spiegel an, der den Lichtstrahl nach O reflektiert. Wird im Moment o das Lichtsignal in O gegeben, so wird das vom Spiegel A_2 reflektierte zur Zeit

$$\frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$$

in O wieder eintreffen, das vom Spiegel A_1 reflektierte aber zur Zeit

$$\frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}.$$

Jetzt ist kein Unterschied mehr vorhanden."

WEYL schreibt dann weiter:

"Nehmen wir aber einen dritten, die Translationsbewegung durch den Äther gleichfalls mitmachenden Punkt A auf der Erde an, so daß $OA = l$ ist, aber die Richtung OA mit der Bewegungsrichtung einen Winkel ϑ einschließt! In der Figur sind O , O' , O'' die sukzessiven Orte des Punktes O zur Zeit o , wo das Lichtsignal abgeschickt wird, im Augenblick t' , in welchem es von dem an der Stelle A' befindlichen Spiegel A reflektiert wird, und schließlich zur Zeit $t' + t''$, wo es wieder in O eintrifft.

Aus der Figur geht hervor

$$OA' : O''A' = OO' : O''O';$$

folglich sind die Winkel bei A' einander gleich: der reflektierende Spiegel muß, wie im Falle der Ruhe, senkrecht zu der starren Verbindung OA gestellt werden, damit der Lichtstrahl nach O zurückkommt¹. Eine elementare trigonometrische Rechnung liefert für die *scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung ϑ* :

$$(III.21) \quad \frac{2l}{t' + t''} = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{c^2 - v^2} \sin \vartheta}.$$

Sie ist also keine Konstante wie im Falle der ruhenden Erde, sondern abhängig von dem Richtungswinkel ϑ ; durch ihre Beobachtung muß sich Richtung und Größe von v feststellen lassen."

WEYL erkannte nicht, dass diese Abbildung den Ausschnitt eines elliptischen Spiegels mit den Brennpunkten O und O'' und dem Reflexionspunkt A' zeigt. Somit bildet die Winkelhalbierende die Normale der Ellipse und der Spiegel die Tangente.

In dem Dreieck mit der Winkelhalbierenden nach Abbildung 1 bedeuten die Eckpunkte und Seitenlängen

$$A \equiv O, \quad B = O'', \quad C \equiv A', \quad (1.1)$$

$$a = ct'', \quad b = ct', \quad c = v(t' + t''). \quad (1.2)$$

Der Punkt $D = C' \equiv O'$ teilt die Strecke

$$c = \overline{AB} = c_1 + c_2 = vt' + vt'' = \lambda c_2 + c_2 = c_2(1 + \lambda), \quad (1.3)$$

im Verhältnis

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \lambda = \frac{vt'}{vt''} = \frac{t'}{t''}, \quad (1.4)$$

$$c_2 = \frac{1}{1 + \lambda} c, \quad c_1 = \lambda c_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} c. \quad (1.5)$$

¹Dies ist nicht ganz exakt, da für den bewegten Spiegel das gewöhnliche Reflexionsgesetz nicht streng gültig ist; doch ist die Abweichung des Winkels von einem rechten nur von der Größenordnung q^* . (WEYL)

Ebenso ist das Seitenverhältnis

$$\frac{b}{a} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \lambda, \quad (1.6)$$

woraus sich das Doppelverhältnis

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 1 \quad (1.7)$$

ergibt. Mit der Einführung der großen Geschwindigkeit V analog zu LORENTZ und EINSTEIN vermeidet man Komplikationen mit der Seitenlänge c . Ebenso wird das Verhältnis der Zeiten $t' : t''$ zu der geometrischen Größe λ . Alle Berechnungen lassen sich damit auf c , λ und $\frac{v}{V}$ beziehen.

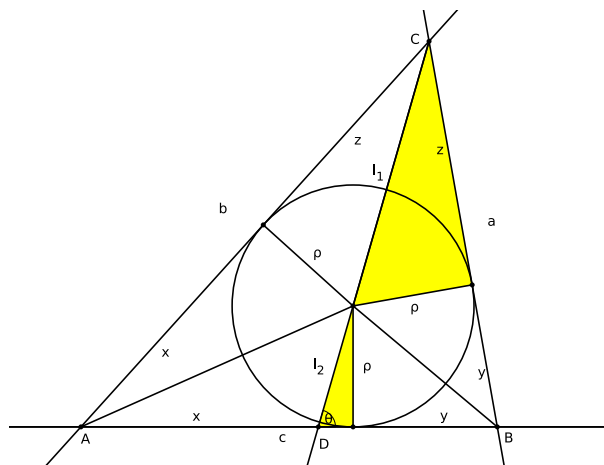
WEYL beschreibt eine Messung auf der durch das Weltall bewegten Erde ohne Berücksichtigung einer Translationsgeschwindigkeit $p = v' - v$ aus der Sicht eines anderen Körpers im Raum.

2 Zur Theorie des Dreiecks

Die Definition eines Innenkreises eines Dreiecks ist bekannt. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ . Der von den Seiten tangierte Innenkreis hat den Radius ϱ , und die drei auf den Seiten senkrecht stehenden Radien teilen das Dreieck in drei symmetrische Vierecke. Jeweils zwei rechtwinklige Dreiecke mit gemeinsamen Eckpunkt A, B oder C sind spiegelbildlich und haben denselben Flächeninhalt, woraus sich der gesamte Flächeninhalt als Funktion des halben Umfangs s und dem Radius ϱ zu

$$F = \frac{1}{2}\varrho(x + y + z) \cdot 2 = \varrho s, \quad (2.1)$$

$$s = x + y + z = \frac{a + b + c}{2} \quad (2.2)$$



ergibt. Für die Seiten gilt

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y, \quad (2.3)$$

und damit

$$b + c - a = 2x = (a + b + c) - 2a, \quad x = s - a, \quad (2.4)$$

$$a + c - b = 2y = (a + b + c) - 2b, \quad y = s - b, \quad (2.5)$$

$$a + b - c = 2z = (a + b + c) - 2c, \quad z = s - c. \quad (2.6)$$

In dem großen markierten Dreieck ist

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{z} = \frac{\varrho}{s - c} = \frac{2\varrho}{a + b - c}. \quad (2.7)$$

Nach dem Kosinussatz ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (2.8)$$

Über

$$\cos \gamma = \frac{1 - \tan^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}} \quad (2.9)$$

erhält man

$$2ab \left(1 - \tan^2 \frac{\gamma}{2}\right) = (a^2 + b^2 - c^2) \left(1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$2ab - (a^2 + b^2 - c^2) = (+2ab + a^2 + b^2 - c^2) \tan^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (2.11)$$

$$\tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - c^2} = \frac{c - (a-b)}{(a+b) - c} \cdot \frac{c + (a-b)}{(a+b) + c} = \frac{2x}{2z} \cdot \frac{2y}{2s} = \frac{xy}{zs}, \quad (2.12)$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)s}}, \quad (2.13)$$

$$\varrho = (s-c) \tan \frac{\gamma}{2} = (s-c) \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)s}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \quad (2.14)$$

Damit wird der Flächeninhalt des Dreiecks

$$F = \varrho s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}, \quad (2.15)$$

$$F = \sqrt{x^2yz + xy^2z + xyz^2}. \quad (2.16)$$

Die Länge der Winkelhalbierenden ist

$$l = l_1 + l_2 = \sqrt{\varrho^2 + z^2} + \sqrt{\varrho^2 + (x - \overline{AD})^2}. \quad (2.17)$$

Mit $x = s - a$ und $z = s - c$ sowie $\overline{AD} = c_1$ wird daraus

$$l = \varrho \left[\sqrt{1 + \left(\frac{s-a}{\varrho}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{s-a-c_1}{\varrho}\right)^2} \right]. \quad (2.18)$$

Die Bedeutung der Winkelhalbierenden werden wir noch in anderen Zusammenhängen kennenlernen.

3 Der Satz des Apollonius

Die nebenstehende Abbildung 3 (s.a. [2]) zeigt das WEYLSche Dreieck aus einer anderen Perspektive. Die Punkte A, D, B, E bilden verschiedene interessante Strecken

$$\overline{AD} = vt', \quad \overline{DB} = vt'', \quad \overline{AB} = v(t' + t''), \quad (3.1)$$

$$\overline{DE} = d = 2r. \quad (3.2)$$

r ist der Radius des Thaleskreises mit der Strecke $l = \overline{CD}$ als Sehne sowie als Tangente einer Hyperbel, Normale einer Ellipse und Winkelhalbierende des Winkels γ des Dreiecks $\angle ABC$. Die beiden Streckenpaare $\overline{BE_1} \parallel \overline{D_1C}$ und $\overline{BD_1} \parallel \overline{E_1C}$ bilden ein Rechteck mit der Diagonale $\overline{BC} = a = vt''$.

Mit dem Strahlensatz bei A beginnend erhält man

$$\overline{AC} : \overline{CD'} = \overline{AD} : \overline{DB} = b : a, \quad (3.3)$$

d.h. \overline{AB} wird durch D im Verhältnis

$$\lambda_1 = (ADB) = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = + (b : a) \quad (3.4)$$

geteilt. Ebenso ist

$$\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{E'C} = \overline{AC} : \overline{CB} = b : a. \quad (3.5)$$

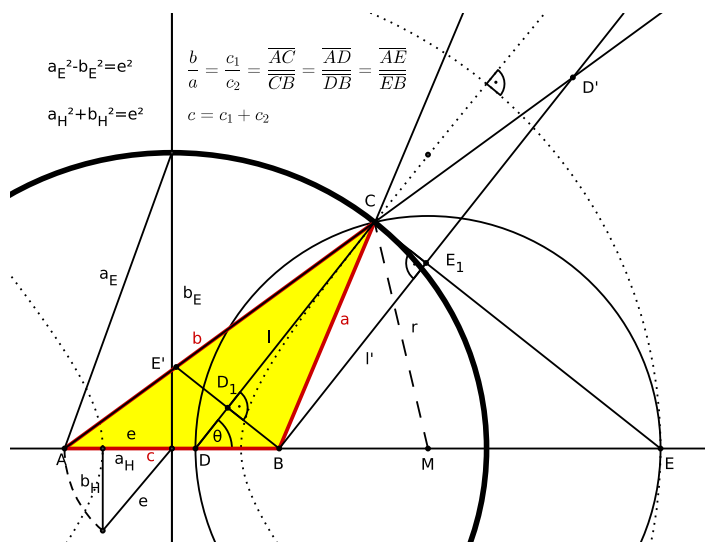


Abbildung 3: Satz des APOLLONIUS

Unter Beachtung der Richtungen (Vektoren zwischen den Punkten), wird

$$\lambda_2 = (AEB) = -\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = -(b : a). \quad (3.6)$$

Der außerhalb der beiden Brennpunkte A und B liegende Punkt E teilt die Strecke \overline{AB} in demselben Verhältnis. Die Punkte stehen in einem Doppelverhältnis

$$(ABDE) = \lambda_1 : \lambda_2 = -1. \quad (3.7)$$

So wie \overline{CD} den Winkel $\angle ACB$ halbiert, wird auch $\angle BCD'$ durch \overline{CE} halbiert.

D und E sind die harmonischen Punkte zu A und B . Daraus resultiert der Satz des APOLLONIUS:

Der geometrische Ort der Eckpunkte C_i aller Dreiecke $\triangle ABC_i$ mit gegebener Seite \overline{AB} , deren andere Seiten im konstanten Verhältnis $\overline{AC_i} : \overline{C_iB} = \lambda$ stehen, ist der THALESkreis über der Strecke \overline{DE} als Durchmesser, deren Endpunkte D und E die Seite \overline{AB} innen und außen im Verhältnis λ teilen.

Die drei Verhältnisse am THALESkreis mit den Teilungspunkten D, C, E sind

$$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}. \quad (3.8)$$

Die Teilverhältnisse sind durch die Punkte D, C, E sowohl im Zähler als auch im Nenner erkennbar. Wir finden in dieser Formel die Bestätigung des Teilungsverhältnisses in der Abbildung 1. Mit dem Wandern des Punktes C von D über den THALESkreis nach E vergrößern sich die Ellipsen von der Strecke \overline{AB} bis an den Punkt E . Das entspricht der Darstellung eines Gravitationsfeldes einer Linienmasse oder des elektrischen Potentials einer Linienladung. Die Hyperbeln bilden dabei die Feldlinien. Zwischen dem Winkel ϑ und dem Teilverhältnis λ gilt

$0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$	$\lambda > 1$
$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\lambda = 1$
$\frac{\pi}{2} < \vartheta \leq \pi$	$\lambda < 1$

Die Strecken \overline{AE} und \overline{BE} können aus den Längenverhältnissen gewonnen werden:

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}, \quad (3.9)$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \quad \overline{BE} = \frac{\overline{AE}}{\lambda}, \quad (3.10)$$

$$\overline{AE} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \overline{AE} \frac{\lambda - 1}{\lambda} = \overline{AB}. \quad (3.11)$$

Durchmesser und Radius des Thaleskreises ergeben sich zu

$$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \overline{AE} - \overline{AB} \frac{\lambda}{1 + \lambda} = \overline{AE} - \overline{AE} \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad (3.12)$$

$$\overline{AD} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \overline{AB} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} \overline{AE} = -\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \overline{AE}$$

$$d = \overline{DE} = \overline{AE} \left(1 - \frac{\lambda - 1}{1 + \lambda}\right) = \overline{AE} \left(1 + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) = \frac{2}{1 + \lambda} \overline{AE}, \quad (3.13)$$

$$r = \frac{1}{1 + \lambda} \overline{AE} = \frac{1}{1 + \lambda} \cdot \frac{\lambda}{1 - \lambda} \overline{AB} = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \lambda} - \frac{1}{1 - \lambda}\right) \overline{AB}. \quad (3.14)$$

Hieraus findet man

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\right) \frac{1}{\overline{AE}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{AE}} + \frac{1}{\overline{AD}}\right). \quad (3.15)$$

Weitere Längenverhältnisse ergeben sich zu

$$\sin \vartheta = CE : DE = BD_1 : DB = E_1E : BE \quad (3.16)$$

$$\cos \vartheta = DC : DE = DD_1 : DB = BE_1 : BE, \quad (3.17)$$

$$\tan \vartheta = CE : DC = BD_1 : DD_1 = E_1E : BE_1. \quad (3.18)$$

Damit ist die Länge der Winkelhalbierenden

$$l = \overline{DC} = \overline{DE} \cos \vartheta = 2r \cos \vartheta = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} \overline{AB} \cos \vartheta = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} c \cdot \cos \vartheta. \quad (3.19)$$

l wird weiter unten bestimmt.

4 Satz des Ceva

Beliebige Transversalen in Dreiecken gehen durch die Eckpunkte und schneiden die gegenüberliegenden Seiten in bestimmten Längenverhältnissen. In der nebenstehenden Abbildung 4 wurden die drei Winkelhalbierenden als Transversale bewusst ausgewählt. Die Seiten

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad c = c_1 + c_2 \quad (4.1)$$

umlaufen das Dreieck in mathematisch positivem Sinn. Die Längenverhältnisse der Teilstrecken sind

$$\lambda_a = a_1 : a_2, \quad \lambda_b = b_1 : b_2, \quad \lambda_c = c_1 : c_2, \quad (4.2)$$

$$a = \lambda_a a_2 + a_2 = a_2 (1 + \lambda_a), \quad (4.3)$$

$$b = \lambda_b b_2 + b_2 = b_2 (1 + \lambda_b), \quad (4.4)$$

$$c = \lambda_c c_2 + c_2 = c_2 (1 + \lambda_c). \quad (4.5)$$

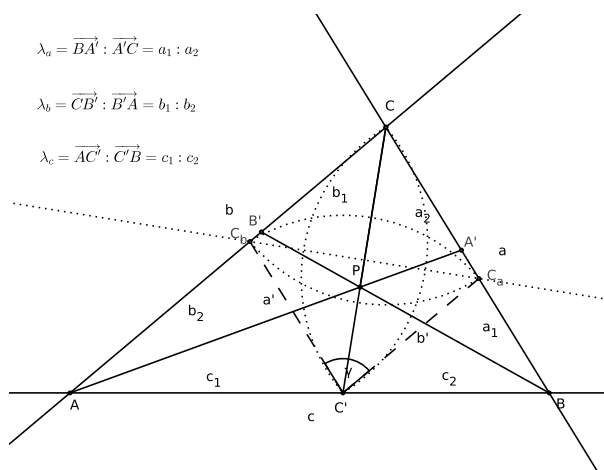


Abbildung 4: Satz von Ceva

Die beiden gestrichelten Parallelen erzeugen zwei zum Dreieck $\triangle ABC$ ähnliche Dreiecke $\triangle AC'C_b$, $\triangle C'BC_a$ und ein Parallelogramm $\diamond C'C_aCC_b$. Da $a' \parallel a$ und $b' \parallel b$ sind, ist das Parallelogramm symmetrisch zur Winkelhalbierenden und bildet deshalb einen Rombus. Daraus folgt $a' = b'$, wie es auch die gepunkteten Kreisbögen und die daraus entstehende Mittelsenkrechte zeigen.

Der Strahlensatz liefert

$$\frac{a'}{a} = \frac{c_1}{c} = \frac{\lambda_c c_2}{\lambda_c c_2 + c_2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + 1}, \quad (4.6)$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{c_2}{c} = \frac{c_2}{\lambda_c c_2 + c_2} = \frac{1}{\lambda_c + 1}. \quad (4.7)$$

Daraus folgt

$$a' = a \frac{c_1}{c} = a \frac{\lambda_c}{\lambda_c + 1}, \quad b' = b \frac{c_2}{c} = b \frac{1}{\lambda_c + 1}, \quad (4.8)$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{ac_1}{bc_2} = \frac{a}{b} : \frac{c_2}{c_1} = \frac{a}{b} \lambda_c. \quad (4.9)$$

Wegen der Gleichheit von $a' = b'$ ist

$$\frac{a'}{b'} = 1 = \frac{a}{b} \lambda_c, \quad \lambda_c = \frac{b}{a} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.10)$$

Ebenso muss dann sein

$$\lambda_a = \frac{c}{b} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \lambda_b = \frac{a}{c} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (4.11)$$

Daraus folgt der Satz von CEVA, der hier nur für die Winkelhalbierenden bewiesen wurde:

Drei Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, wenn das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit der Gegenseite auf diesen bilden, den Wert Eins hat.

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{c}{b} \frac{a}{c} \frac{b}{a} = \frac{a_1}{a_2} \frac{b_1}{b_2} \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.12)$$

5 Dreieck und Ellipse

Die nebenstehende Abbildung 5 zeigt den Zusammenhang eines Dreiecks mit einer Ellipse.

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Summe der Abstände von zwei Brennpunkten konstant ist.

Es ist also $a + b = konst.$ Desweiteren ist aus der Theorie der konformen Abbildungen und der elektromagnetischen sowie der Gravitations-Potentialtheorie bekannt, dass sich eine Ellipse mit jeder konfokalen Hyperbel rechtwinklig schneidet. Die Tangente der Hyperbel am Schnittpunkt ist gleichzeitig die Normale der Ellipse, und so haben ist das WEYLSche Dreieck nach Abbildung 1 ein Teil der Theorie der Ellipse und Hyperbel. Für beide Kegelschnitte gelten die Beziehungen

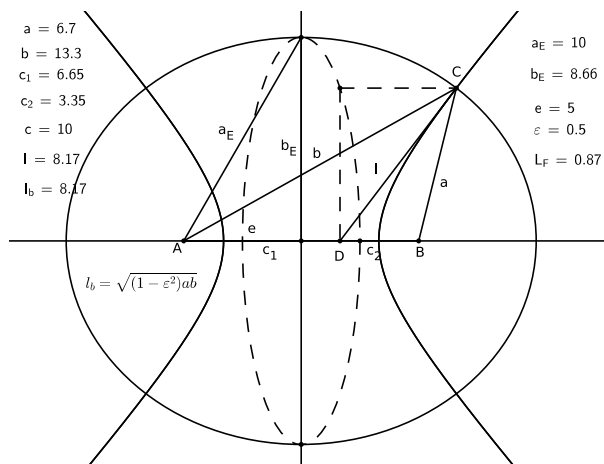


Abbildung 5: Strecken des Dreiecks

$$a_E^2 - b_E^2 = e^2, \quad \text{bzw.} \quad a_H^2 + b_H^2 = e^2. \quad (5.1)$$

Ellipse und Hyperbel kann man als *duale* eineiige Zwillinge verschiedenen Geschlechts ansehen².

Die wechselweisen Normalen und Tangenten der Kegelschnitte halbieren den Winkel γ am Schnittpunkt C und teilen die Strecke $\overline{AB} = 2e$ am Punkt D in $c = c_1 + c_2$. Der Kosinussatz für die beiden Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBE$ ergibt

$$b^2 = c_1^2 + l^2 - 2c_1l \cos(\pi - \vartheta) = c_1^2 + l^2 + 2c_1l \cos \vartheta, \quad (5.2)$$

$$a^2 = c_2^2 + l^2 - 2c_2l \cos \vartheta. \quad (5.3)$$

Aus der linearen Exzentrizität e ergibt sich die numerische Exzentrizität ε

$$e^2 = a_E^2 - b_E^2 = a_E^2 \left(1 - \frac{b_E^2}{a_E^2}\right), \quad \varepsilon^2 = \frac{e^2}{a_E^2} = \frac{a_E^2 - b_E^2}{a_E^2} = 1 - \frac{b_E^2}{a_E^2} \quad (5.4)$$

oder die Umkehrung

$$\frac{b_E}{a_E} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \frac{a_E}{b_E} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (5.5)$$

Wegen $a + b = konst.$ (Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den Brennpunkten) ist bei $\vartheta = \pi/2$

$$a = b, \quad c_1 = c_2 = e, \quad (5.6)$$

²ALBERT EINSTEIN begann seine Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie [4] mit dem bedeutungsvollen Satz:

“Daß die Elektrodynamik Maxwells - wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt - in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt.”

Der verheiratete EINSTEIN müsste aus eigener Erfahrung als Vater von der Asymmetrie in der Natur gewusst haben.

$$l = \sqrt{a^2 - c_1^2} = a\sqrt{1 - \frac{e^2}{a^2}} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = b_E, \quad (5.7)$$

$$a = a_E, \quad (5.8)$$

d.h.

$$a + b = 2a_E = (a_E - ke) + (a_E + ke), \quad (5.9)$$

$$a = (a_E - ke), \quad b = (a_E + ke), \quad (5.10)$$

$$ab = (a_E^2 - k^2e^2) = a_E^2(1 - k^2\varepsilon^2). \quad (5.11)$$

Nun eliminieren wir aus den Kosinussätzen $2l \cos \vartheta$

$$2l \cos \vartheta = \frac{b^2 - c_1^2 - l^2}{c_1} = \frac{-a^2 + c_2^2 + l^2}{c_2}, \quad (5.12)$$

$$l^2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = \frac{b^2 - c_1^2}{c_1} + \frac{a^2 - c_2^2}{c_2} = \frac{c_2(b^2 - c_1^2) + c_1(a^2 - c_2^2)}{c_1 c_2}, \quad (5.13)$$

$$l^2 \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2} = \frac{c_2 b^2 + c_1 a^2}{c_1 c_2} - \frac{c_2 c_1^2 + c_1 c_2^2}{c_1 c_2}, \quad (5.14)$$

kürzen die Nenner

$$l^2 = \frac{c_2 b^2 + c_1 a^2}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 c_2 (c_1 + c_2)}{c_1 + c_2} = \frac{c_2}{c} b^2 + \frac{c_1}{c} a^2 - c_1 c_2, \quad (5.15)$$

und setzen die bekannten Verhältnisse ein

$$c_1 = \lambda c_2, \quad b = \lambda a, \quad (5.16)$$

$$l^2 = \frac{c_2 \lambda^2 a^2 + \lambda c_2 a^2}{c_2 (\lambda + 1)} - c_1 c_2 = \lambda a^2 - \lambda c_2^2 = ab - c_1 c_2. \quad (5.17)$$

Für $a = b = a_E$ und $c_1 = c_2 = e$ ergibt sich die Symmetrie mit

$$l^2 = a_E^2 - e^2 = b_E^2. \quad (5.18)$$

Die Umstellung der beiden letzten Gleichungen in die Gestalt

$$ab = l^2 + c_1 c_2, \quad (5.19)$$

$$a_E^2 = l^2 + e^2 \quad (5.20)$$

gehören in die Gruppe der Flächensätze wie der Sätze des PYTHAGORAS und des EUKLID sowie des Höhengsatzes. Gerade damit die EUKLIDISCHE Geometrie aus den Angeln heben zu wollen, ist ein ehrgeiziges Unterfangen.

Die sogenannte EINSTEINSche Lichtuhr ist also ein bewegter senkrechter Stab mit der Länge $l = b_E$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Der allgemeine Fall ist mit $b = Vt'$, $a = Vt''$, $c_1 = vt'$ und $c_2 = vt''$

$$l^2 = V^2 t' t'' - v^2 t' t'' = V^2 \left(1 - \frac{v^2}{V^2} \right) t' t'', \quad (5.21)$$

$$l = \sqrt{(V^2 - v^2) t' t''} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} V \sqrt{t' t''}, \quad (5.22)$$

oder nach EINSTEIN entweder

$$l = V \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}} \tau \right) \quad \text{oder} \quad \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} = V \tau. \quad (5.23)$$

Haben wir dabei irgendetwas verlängert oder verkürzt? Dem Beamten dritten Grades am Berner Patentamt waren wohl während seiner Arbeit an den Uhrenpatenten die Konstruktionen zu Kopf gestiegen? Ihm ist nur nicht gelungen, eine geschwindigkeitsabhängige Uhr zu konstruieren.

Die beiden Formeln

$$\frac{b_E}{a_E} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}, \quad \frac{a_E}{b_E} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} \quad (5.24)$$

sind die Schlüsselausdrücke der LORENTZ-Transformation und spuken seit 1905 in den Köpfen der meisten Physiker herum. $\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist das Verhältnis der Hauptachsen bzw. der Stauchungsgrad (LORENTZ-Faktor $L_F = \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}$) der Ellipse und als Kehrwert der Schlankheitsgrad.

Wir zerlegen die Gleichung für die Länge noch in ihre Bestandteile

$$l^2 = (V - v) t' \cdot (V + v) t'', \quad (5.25)$$

$$l = \sqrt{(V - v) t' \cdot (V + v) t''}. \quad (5.26)$$

Das ist die Kernaussage der speziellen Relativitätstheorie:

Der Anfangspunkt \overline{AC} eines Stabes der Länge l möge sich ohne Drehung mit konstanter Geschwindigkeit v in Richtung B bewegen. Zu einem beliebigen Zeitpunkt soll ein Signal in A in einer bestimmten Richtung (z.B. als Kreis oder Kugelwelle) ausgelöst werden, dass es nach einer gewissen Zeit t' den Endpunkt C erreicht. Nach der Reflektion an einem senkrecht zum Stab befestigten Spiegel erreicht das reflektierte Signal nach einer weiteren Zeit t'' wieder den Anfangspunkt A des Stabes. Die zurückgelegte Strecke \overline{AB} bildet mit den Punkten A und B die Brennpunkte einer Ellipse durch C .

Die Wirkung ist dieselbe wie bei einem elliptischen Spiegelsaal mit den genannten Abmessungen. Da dieses Modell unabhängig von einer Bewegung des Spiegelsaales relativ zur Außenwelt ist, haben alle erdenklichen Wellenzüge dieselbe Phasenverschiebung zu dem Signal der Quelle. Es wird alle Strahlungsenergie im zweiten Brennpunkt, wie schon der Name sagt, konzentriert und gleichphasig eintreffen. Ein besonders schneller Beobachter überholt das Echo und kann damit die vergangene Information empfangen.

Das ist gerade der Ansatz von ALBERT EINSTEIN 1905

$$t' = t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}, \quad t'' = t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}. \quad (5.27)$$

Überraschend ist die Abhängigkeit von den Zeiten als Zeichen der vektoriellen Addition der Geschwindigkeitskomponenten in nebenstehender Abbildung 6

$$\vec{b} = \vec{c}_1 - \vec{b}', \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{c}_2, \quad \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2. \quad (5.28)$$

Nachdem alle Längen bekannt sind, folgt mit Gleichung (4)

$$l = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} c \cdot \cos \vartheta = \left(\frac{1}{1 - \lambda} - \frac{1}{1 + \lambda} \right) c \cdot \cos \vartheta, \quad (5.29)$$

$$\cos \vartheta = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \frac{l}{2c}. \quad (5.30)$$

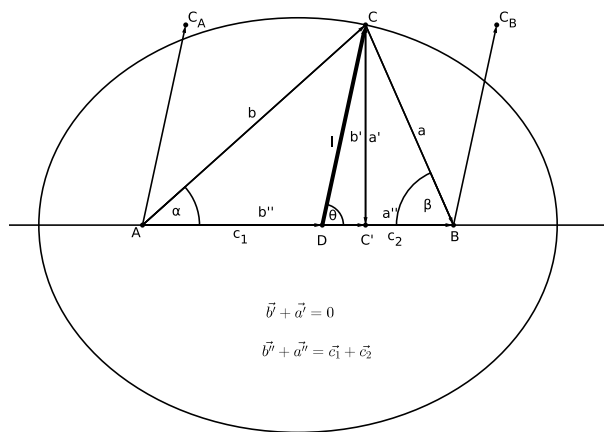


Abbildung 6: Bewegter schräger Stab und Vektoraddition der Wege

6 Ellipse und Hyperbel

In der Abbildung 3 sind die beiden Punkte A und B konfokale Brennpunkte einer Ellipse und einer Hyperbel. Beide Kegelschnitte schneiden sich in dem Punkt C . Die Winkelhalbierende des Winkels γ ist sowohl Tangente an der Hyperbel als auch Normale der Ellipse. Beide Tangentenabschnitte von Hyperbel und Ellipse bilden den THALESKREIS des Satzes des APOLLONIUS. Das Dreieck $\triangle ABC$ mit einem konstanten Umfang ist gerade die Konstruktion einer Ellipse.

Die Ellipse mit den Brennpunkten A und B ist die Ortskurve aller Punkte C , deren Abstandssumme $\overline{AC} + \overline{BC}$ konstant ist.

Die Hyperbel mit den Brennpunkten A und B ist die Ortskurve aller Punkte C , deren Abstandsdifferenz $\overline{AC} - \overline{BC}$ konstant ist.

Mittels eine schiefwinkligen Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y+x) \cos \alpha \\ (y-x) \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

erhält man aus der Hyperbelgleichung und der Asymptotengleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad \eta = \pm \frac{b}{a} \xi = \pm \xi \tan \alpha \quad (6.2)$$

durch Einsetzen

$$\frac{(y+x)^2 \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{(y-x)^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1. \quad (6.3)$$

Mit

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = 1 \quad (6.4)$$

wird

$$(y^2 + 2yx + x^2) - (y^2 - 2yx + x^2) \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{b^2 \cos^2 \alpha} = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}, \quad (6.5)$$

$$4yx = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}, \quad 4yx = \frac{b^2}{\sin^2 \alpha}, \quad (6.6)$$

$$4yx (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = a^2 + b^2, \quad (6.7)$$

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{e^2}{4} = \left(\frac{e}{2}\right)^2 = \text{konst.} \quad (6.8)$$

Wir haben in der letzten Gleichung die Bedingung der linearen Exzentrizität der Hyperbel

$$a_H^2 + b_H^2 = e^2 \quad (6.9)$$

als linkes unteres Dreieck in Abbildung 3. Die entsprechende Gleichung der Ellipse ist das linke obere Dreieck mit

$$a_E^2 - b_E^2 = e^2, \quad (6.10)$$

und e ist der halbe Abstand der Punkte A und B . Die Vektoren entsprechen prinzipiell den Lichtwegen hin und zurück sowie der Vorwärtsbewegung des Punktes A nach A' bei ALBERT EINSTEIN [4].

Die Koordinatentransformation führt die Mittelpunktsleichung in die Asymptotengleichung über. Man erkennt hierin die Rotation, die auch bei der LORENTZ-Transformation (s.a. MINKOWSKI [9]) eine Rolle spielt.

Die Gleichungen der Ellipse sind

$$a_E^2 - b_E^2 = e^2 = a_E^2 \left(1 - \frac{b_E^2}{a_E^2}\right) = e^2, \quad b_E^2 = a_E^2 - e^2 = a_E^2 (1 - \varepsilon^2), \quad (6.11)$$

bzw. der Hyperbel

$$a_H^2 + b_H^2 = e^2 = a_H^2 \left(1 + \frac{b_H^2}{a_H^2}\right) = e^2, \quad b_H^2 = e^2 - a_H^2 = a_H^2 (\varepsilon^2 - 1). \quad (6.12)$$

7 Die spezielle Relativitätstheorie

HERMANN WEYL hat das oben genannte Zitat verwendet, obwohl EINSTEIN lediglich seinen bewegten Stab auf der Geraden durch die Brennpunkte betrachtete. Für diesen Fall ist in dem Dreieck $\vartheta = 0$ anzunehmen. Es geht dann $\varrho \rightarrow 0$. Die Punkte C und E treffen sich am äußersten rechten Rand der Ellipse. Die Hyperbel entartet zu zwei Doppelstrahlen.

Die geometrische Beschreibung des EINSTEINSchen bewegten Stabes haben wir mit dem WEYLSchen Dreieck umgesetzt und dabei keinerlei Anzeichen für eine Kontraktion oder Zeitdehnung gefunden. Es konnten lediglich die geometrischen Verhältnisse zwischen einem Dreieck mit fester Grundseite als gärtnerisches Zeichenprinzip für eine Ellipse festgestellt werden. Die inneren Zusammenhänge zwischen der Theorie des Dreiecks und der Theorie der Kegelschnitte ist verbunden mit der Winkelhalbierenden als Normale und der Tangente als Spiegel. Alles Andere ist reines Rechnen.

Wenn man die Ellipse mit dem eingeschriebenen Dreieck mit einer konstanten Translationsgeschwindigkeit p bewegt, bleibt die Form der Anordnung mit dem darin bewegten Stab (Parallelverschiebung entlang der Längsachse) erhalten. Es gilt dann voll und ganz die GALILEI-Transformation. Gleichzeitig wird auch die Phasenlage des ankommenden Signals immer in fester Beziehung zur Phasenlage des Sendeaugenblicks sein. Das Lichtzentrum bleibt immer am bewegten Brennpunkt A , und der Brennpunkt B bleibt der Empfänger in dem elliptischen Spiegel, wenn man den Stab in der Länge anpasst. Der Lichtweg auf den Strecken b und a ändert sich wegen der starren Verbindung nicht. Das hat nichts mit Verkürzung zu tun. Die spezielle Relativitätstheorie ist statisch ausgelegt worden. Die Geschwindigkeit v bedeutet lediglich den geometrischen Zusammenhang zwischen der Lichtausbreitung, der Reflexion und dem Empfang. Das System des Spiegels bleibt im Innern des GALILEISchen Schiffes von der Außenwelt unbeeinflusst.

EINSTEINS Differentialgleichung war so angelegt worden, dass sowohl die Koordinate x' als auch die Zeit τ variabel sein können.

Wir haben bei der Berechnung so getan, als würde der Beobachter von A nach B nur auf geradlinigem Wege dorthin gelangen. Bei der Sternenbeobachtung ist das wegen der rotierenden Erde auf der elliptischen Bahn um die Sonne überhaupt nicht möglich. Es kommt ganz allein auf die Ortsbestimmung des Abstandes \overline{AB} an. Dann entfällt die Geschwindigkeit v in der Rechnung, und es bleibt allein ein Problem der Triangulierung mit den Strecken $c_1 = vt'$ und $c_2 = vt''$ übrig, natürlich unter der Beachtung des Wegintegrals des Beobachters über der Zeit

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = \int_0^{t''} \mathbf{v}(t) dt. \quad (7.1)$$

Der Punkt D ist lediglich der Ort, an dem sich der Anfang des Stabes zum Zeitpunkt t' befindet, so dass das Licht auf den Spiegel am Ende des Stabes, der sich gerade am Punkt C befindet, trifft. Während der Beobachtungsphasen ist jedoch die differentielle Wegänderung maßgeblich. Man kann also an A und B jeweils einen Beobachter stationieren, die beide über synchronisierte EINSTEIN-Uhren verfügen, und da sich beide Beobachter nicht bewegen, z.B. nicht auf der Erde, kann es dann auch keine Zeitdilatation und Längenkontraktion geben. Zusätzlich kann man natürlich die beiden EINSTEINSchen Zwillinge A' und B' auf dem Ende eines langen Stabes (Raumschiff) zur Beobachtung postulieren.

Die Geometrie beweist lediglich die exakten Methoden von FIZEAU[7] und FOUCAULT [3, 1]. Auch bei Rotation einer starren Einrichtung wie bei den Modifikationen des SAGNAC-Experimentes bleibt die Phasendifferenz bei fester Drehzahl konstant.

Die spezielle Relativitätstheorie ist keine Transformation sondern nur eine Rechenvorschrift, um den Gedankenversuch von EINSTEIN zum Erfolg zu führen, dass ein Beobachter am Stabanfang zu einem Zeitpunkt $t = 0$ ein Signal in eine zu bestimmende Richtung unter dem Winkel α aussenden kann und bei einer konstanten Bewegungsgeschwindigkeit v mit dem Stab zusammen das Signal nach der Reflexion am Stabende C und nach einer Laufzeit $t' + t''$ wieder aus der Richtung β empfangen kann. Die von WEYL vorgeschlagene Methode erweitert die klassischen Versuche, die Messungen nur geradlinig durchführen zu können. Nebenbei kann der bewegte Stab auch eine beliebige Strecke auf der Erde sein, aber die Geschwindigkeitsunterschiede von v und V sind so groß, dass ein Effekt sicher nicht messbar sein wird. Es gibt keinen zweiten Lichtstrahl, der mit dem ersten interferieren kann.

8 Geometrie in der Elektrotechnik

Die Untersuchung der Wurzeln der LORENTZ-Transformation und der speziellen Relativitätstheorie anhand des EINSTEINSchen bewegten Stabes reflektiert Dank des hochkomplexen menschlichen Gehirns - und dabei meine ich nicht unbedingt mein eigenes - weit in Jahrzehnte zurückliegende Erfahrungen. Als Student der Elektrotechnik, was offensichtlich auch EINSTEINS Studienrichtung an der ETH in Zürich war, denn die Elektrotechnik ging aus dem Maschinenwesen hervor, gehörten zur Ausbildung

- Ortskurven,
- Konforme Abbildungen,
- Theorie der Asynchronmaschine,
- Theorie elektrischer Leitungen.

Mein Lehrer der theoretischen Elektrotechnik war noch ein Professor der alten Schule und hantierte an der Tafel häufig mit dem Kreis des APOLLONIUS. In der Ortskurventheorie wurde die geometrische Interpretation mittels der komplexen Zahlen angewendet. Erst vor kurzer Zeit bat mich ein Student der Hochfrequenztechnik um Hilfe. Dabei lernte ich das SMITH-Diagramm als Hilfsmittel für den Entwurf analoger elektronischer Schaltungen kennen. Da ist es beinahe nicht verwunderlich, dass nachts unvermittelt die Gedanken des körpereigenen Supercomputers tief vergrabene Kenntnisse an die Oberfläche beförderten. Als ich vor einigen Jahren einem ehemaligen Studienkollegen, jetzt aktiver Emeritus, über meine Beschäftigung mit der speziellen Relativitätstheorie berichtete, gab er mir spontan zur Antwort: Denke an den Schlupf unserer Wechselstrommaschinen. Wie Recht hatte er, obwohl ich seinem Rat nicht folgte.

Als Beispiel möchte ich hier nur den Kreis des APOLLONIUS als Ortskurve einer idealisierten verlustfreien Asynchronmaschine anführen. Diese stellt in der komplexen Zahlenebene das Betriebsverhalten als Strom-Spannungs- oder Leistungsdiagramm dar. Dabei gibt es vier besondere durch den Schlupf markierte Punkte. Der dem Koordinatenursprung nächste Punkt ist der Leerlauf ($s = 0$) mit dem geringsten Strom, der Fernpunkt ($s = 1$) ist der Kurzschlusspunkt und die beiden Extrempunkte bedeuten die Kippgrenze ($s = \pm s_K$) mit den Maximalmomenten im Motor- bzw. Generatorbetrieb. Das Drehmoment der Maschine wird durch die KLOSSsche Formel

$$\frac{M}{M_K} = \frac{2}{\frac{s}{s_K} + \frac{s_K}{s}} \quad (8.1)$$

und der Läuferstrom durch

$$\frac{I'_2}{I'_{2m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{s_K}{s}\right)^2}} \quad (8.2)$$

beschrieben. Trotz der Drehzahlgleichung

$$n_m = (1 - s)n_0 \quad (8.3)$$

denkt dabei niemand an die Relativitätstheorie. Dabei entsteht die Gleichung aus dem DOPPLER-Effekt, weil der Kurzschlusskreis sich beim Motor langsamer dreht als das magnetische Feld, während der kurzgeschlossene Sekundärkreis beim Generatorbetrieb dem Feld vorausleilt.

Die konforme Abbildung war bereits bei FARADAY und MAXWELL ein Hilfsmittel bei der Untersuchung von elektrischen und magnetischen Feldern. Das setzte sich dann bis zum SMITH-Diagramm fort. Die konforme Abbildung

$$w = \frac{1 - z}{1 + z}$$

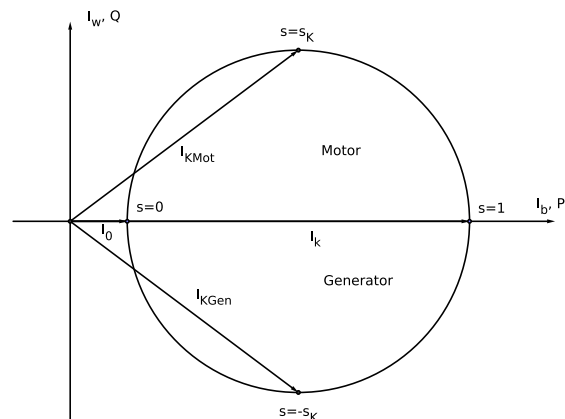


Abbildung 7: Ortskurve der idealisierten Asynchronmaschine

vermittelt zwischen einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem und einem Koordinatensystem mit geschlossenen Kreisen. Diese Gleichung ist wiederum mit der Reflexionsgleichung von Leitungen

$$p = \frac{\beta_2 - \beta_L}{\beta_2 + \beta_L} \quad (8.4)$$

verwand, und berührt damit auch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Leitungen und im Raum.

Literatur

- [1] Détermination de la vitesse de la lumière. In: *Internet*
- [2] *Kleine Enzyklopädie Mathematik*. VEB Bibliographisches Institut, 1968
- [3] ANONYM: La vitesse de la lumière. In: *Internet*
<http://visite.artsetmetiers.free.fr/foucault-lumiere.html>
- [4] EINSTEIN, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921
- [5] FEYNMAN, Richard P.: *Vorlesungen über Physik II*. 3. Ausgabe. Oldenbourg, 2001
- [6] FEYNMAN, Richard P.: *Sechs physikalische Fingerübungen - Physikalische Fingerübungen für Fortgeschrittene*. PIPER München Zürich, 2009. – 234 S.
- [7] FIZEAU: Versuch, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts zu bestimmen. In: *Annalen der Physik* 79 (1850), Nr. I, S. 167 ff.
- [8] MICHELSON, A.A.: Die Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther. In: *Die Naturwissenschaften* 19 (1931), S. 777–784
- [9] MINKOWSKI, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember
- [10] WEYL, Hermann: *Raum - Zeit - Materie*. Springer-Verlag, 1988. – 348 S.