

# Die Lorentz-Invariante

Dipl.-Ing. Wolfgang Lange

17. Januar 2014

Die Geheimnis um die LORENTZ-Transformation wurden seit der Erfindung 1892 nicht aufgeklärt. Mit dieser Transformation konnte H.A. LORENTZ seine Annahme einer Längenverkürzung erklären. Das Problem kann mit den folgenden mathematischen Analysen gelöst werden. Die spezielle Relativitätstheorie ist nicht länger haltbar.

The secret around the Lorentz transformation were not cleared up since the invention in 1892. With this transformation H.A. LORENTZ could explain his acceptance of a reduction in length. The problem can be solved by the following mathematical analyzes. The theory of special relativity is no longer tenable.

## 1 Einleitung

Die Quellen der LORENTZ-Transformation, das ist die Transformation, auf die die spezielle Relativitätstheorie zurückgeht, liegen ziemlich im Dunkeln. Eine genauere Auskunft findet man wohl nur bei H.A. LORENTZ selbst. In seinem frühen Werk "La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants" [8], veröffentlicht in *Extrait des Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, T. XXV. fand ich den ersten Hinweis auf die Grundlagen. Die eigentliche Entwicklung der Transformation ist jedoch in "Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" [9] enthalten. Die Beiträge von LORENTZ in der "Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften" [10] verweisen nur auf die bereits genannten frühen Schriften. Kein Befürworter oder Kritiker an der speziellen Relativitätstheorie von ALBERT EINSTEIN [2] ist auf diesen offenen Punkt eingegangen. Wäre es anders, so hätte sich dieses längst zum Kernpunkt der Relativitätstheorien entwickelt.

Auch die allgemeine Relativitätstheorie [3, 4] bezieht sich auf die spezielle Relativitätstheorie [2] und sogar direkt auf LORENTZ. Das französischsprachige Buch von 1892 brachte mir beim Durchblättern und nach der mühseligen Übersetzung des ersten Zitates keine Erhellung, außer dass die lineare GALILEI-Transformation zu der nichtlinearen LORENTZ-Transformation führte. Als Elektrotechniker wollte ich nicht einsehen, dass die SRT in der allgemeinen Elektrotechnik keine Rolle spielt, und dass die etablierten Physiker zwei sich ausschließende Theorien verwenden und die eine als Näherung der anderen für kleine Geschwindigkeiten erklärten. Das erschien mir wie auch die aufgestellten Paradoxa im Sinne des Wortes schizophren. Versuche, mit früheren Kollegen oder im Internet mit Interessenten auf mathematischem Niveau zu diskutieren, scheiterten. Also habe ich in vielen Büchern studiert bis ich bei FEYNMAN [6] auf die Invariantentheorie stieß, die dort nur eine Nebenrolle bei der Transformation zweier um ein gemeinsames Zentrum rotierender ebener Koordinatensysteme spielte. Die Theorie war mir bereits mehrfach unter anderem auch in der ART aufgefallen, konnte sie aber außer bei den Hebelgesetzen und den elektrotechnischen Transformatorgleichungen in keinen relevanten physikalischen Zusammenhang bringen.

## 2 Einstein versus Einstein

Der Schöpfer der beiden Relativitätstheorien [2, 3] vertritt in seinem Gesamtwerk entgegengesetzte Ansichten. Anlässlich seines Besuches in Princeton im Jahr 1921 äußerte er [4] S. 29

“Die MAXWELL-LORENTZschen elektromagnetischen Feldgleichungen sind bezüglich GALILEI-Transformationen nicht kovariant.”

ALBERT EINSTEIN trug am 29. Oktober und 19. November 1914 in den Sitzungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften [5] S. 74:

Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie

vor

“Daß die Relativität der Bewegung gemäß der neuen Theorie wirklich gewahrt ist, geht daraus hervor, daß unter den erlaubten Transformationen solche sind, die eine Drehung des neuen Systems gegen das alte mit beliebig veränderlicher Winkelgeschwindigkeit entsprechen, sowie solche Transformationen, bei welchen der Anfangspunkt des neuen Systems im alten System eine beliebig vorgeschriebene Bewegung ausführt.

In der Tat sind die Substitutionen

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \tau + y \sin \tau \\y' &= -x \sin \tau + y \cos \tau \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x' &= x - \tau_1 \\y' &= y - \tau_2 \\z' &= z - \tau_3 \\t' &= t,\end{aligned}$$

wobei  $\tau$  bzw.  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  beliebige Funktionen von  $t$  sind, Substitutionen von der Determinante 1.”

Die beiden Gleichungssysteme sind die GALILEI-Transformation mit der dreidimensionalen Drehmatrix  $D$  und dem Verschiebungsvektor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -\mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Weitere definitive Aussagen gegen die SRT findet man beim Stöbern auf S. 203 ff.

Über ein den Elementarprozeß der Lichtemission betreffendes Experiment,

auf S. 205 ff.

Zur Theorie der Lichtfortpflanzung in dispergierenden Medien,

auf S. 274 ff.

Über die Interferenzeigenschaften des durch Kanalstrahlen emittierten Lichtes,

auf S. 316 ff.

Riemann-Geometrie mit der Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus.

Was soll man davon halten? Ohne in die Einzelheiten zu gehen, verwendet er genau die Argumente der Gegner der speziellen Relativitätstheorie, die aber offensichtlich versäumt haben, sich auch etwas mit der allgemeinen Relativitätstheorie zu befassen.

Die Beiträge EINSTEINS zur Lichttheorie decken sich offensichtlich mit einem Aufsatz von SOMMERFELD [15] zu Ehren H.A. LORENTZ', der dort die bekannten ineinander versetzten Lichtkugeln vergleichbar zu den Schall- und Wasserwellen entwickelte. Den Beweis für diese Thesen brachten die von EINSTEIN beschriebenen Versuche mit Kanalstrahlen und das Experiment von TSCHERENKOW 1934, der dafür den Nobelpreis erhielt.

### 3 Das Problem

In dem Buch von 1892 § 132 auf Seite 136 heißt es sinngemäß:

“Ich werde in diesem Kapitel davon ausgehen, dass alle dielektrischen Moleküle sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur x-Achse bewegen. Ich konstruiere neue Achsen, die bezogen auf die unbeweglichen Achsen  $O X$ ,  $O Y$  und  $O Z$  mit der ponderablen Materie verbunden sind.

Die erste dieser Achsen fällt mit der Achse  $O X$  zusammen, und die anderen Achsen bewegen sich parallel zu den Achsen  $O Y$  und  $O Z$ , deren Lage zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit diesen übereinstimmt. Damit sind die neuen Koordinaten

$$(x) = x - pt, \quad (y) = y, \quad (z) = z.$$

Jede Funktion  $\varphi$ , die von  $x, y, z$  und  $t$  abhängt, kann auch ausgedrückt werden als Funktion von  $(x), (y), (z)$  und  $t$ . Ich werde im ersten Fall die Differentialoperatoren als

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad (126)$$

bezeichnen und im zweiten Fall als

$$\frac{\partial}{\partial (x)}, \quad \frac{\partial}{\partial (y)}, \quad \frac{\partial}{\partial (z)}, \quad \frac{\partial}{\partial (t)}. \quad (127)$$

Man sieht leicht, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x)}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial (y)}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial (z)},$$

aber

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial (t)} - p \frac{\partial}{\partial (x)}$$

wird.”

H.A. LORENTZ schrieb dann 1895 in [9] § 19:

“Die wirkliche Geschwindigkeit ist somit

$$\mathbf{p} + \mathbf{v}$$

und ist hierdurch  $\mathbf{v}$  in den Gleichungen zu ersetzen.

Außerdem hat man statt der Differentialquotienten nach  $x, y, z$  und  $t$  solche nach  $(x), (y), (z)$  und  $t$  einzuführen. Die erstgenannten Differentialquotienten bezeichne ich mit

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1,$$

die letztgenannten dagegen mit

$$\frac{\partial}{\partial (x)}, \quad \frac{\partial}{\partial (y)}, \quad \frac{\partial}{\partial (z)}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2.$$

Es ist nun in Anwendung auf eine beliebige Funktion

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial (x)}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial (y)}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial (z)}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 - p_x \frac{\partial}{\partial (x)} - p_y \frac{\partial}{\partial (y)} - p_z \frac{\partial}{\partial (z)}. \end{aligned}$$

Über diese zitierten wenigen Zeilen habe ich sehr lange gegrübelt. Ich erkannte rechtzeitig die kontragrediente Matrix, bis ich endlich nach erfolglosen Hilferufen an einige Mathematiker die Nuss knacken konnte. Die vier letzten Zeilen bedeuten

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{p}_x & -\mathbf{p}_y & -\mathbf{p}_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(x)} \\ \frac{\partial}{\partial(y)} \\ \frac{\partial}{\partial(z)} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

oder die Umkehrung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(x)} \\ \frac{\partial}{\partial(y)} \\ \frac{\partial}{\partial(z)} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\mathbf{p}_x & +\mathbf{p}_y & +\mathbf{p}_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die GALILEI-Transformation und ihre Umkehrung lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & +p_x \\ 0 & 1 & 0 & +p_y \\ 0 & 0 & 1 & +p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Jeweils zwei der vier Matrizen sind zueinander kontragredient, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ +\mathbf{p}_x & +\mathbf{p}_y & +\mathbf{p}_z & 1 \end{pmatrix}^T \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Als Nichtmathematiker hat man damit seine Schwierigkeiten, obwohl diese Matrizen in den klassischen Lehrbüchern behandelt werden. Wie ist LORENTZ auf diese Darstellung gekommen? Da nützt es auch nicht, dass HENRY POINCARÉ Herrn Professor LORENTZ zu der Einführung der Ortszeit gratulierte.

## 4 Die Lösung

Die unvollständige erste Gleichung von LORENTZ ist mit

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{v} \quad (4.1)$$

oder

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + (\mathbf{v}) \quad (4.2)$$

zu ergänzen. In unserer Notation ist das die GALILEI-Transformation

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{v}'. \quad (4.3)$$

Das Differential einer Funktion mehrerer Variablen ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (4.4)$$

Sind darin einige Variablen von einer anderen abhängig, spricht man von mittelbaren Funktionen, zu denen die Raum-Zeit-Funktionen gehören

$$f(t, x(t), y(t), z(t)). \quad (4.5)$$

Mittels Division durch  $dt$  erhält man die erste Ableitung nach  $t$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (4.6)$$

Diese bereits bei MAXWELL [11] in der Elektrodynamik vorkommende Gleichung geht auf EULER zurück und heißt vollständige oder totale Ableitung einer Feldfunktion bzw. "Reisegleichung" (s.a. SCHMUTZER [13]). Dieser Begriff beschreibt die Wirkung der Gleichung. Bewegt sich ein materieller Punkt, eine Substanz, durch ein Feld, wird er an jeder Stelle verschiedene Größen messen können, und zwar die zeitliche Änderung an dieser Stelle und die Änderung infolge der eigenen Bewegung. HEINRICH HERTZ [7] beschrieb die Situation (mit geänderten Formelzeichen!) so:

"Die Zahl der Kraftlinien, welche unser besonderes Flächenstück durchsetzen, ändert sich nun aus verschiedenen Ursachen; wir wollen den Betrag, welcher jede einzelne Ursache liefert, gesondert betrachten.

1. Insofern *erstens* die genannte Anzahl sich verändern würde, wenn auch das Flächenstück in seiner ursprünglichen Lage beharrte, beträgt die Änderung

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} dt,$$

wenn wir nämlich mit dem Symbol  $\frac{\partial B_x}{\partial t}$  die Änderungsgeschwindigkeit von  $B_x$  in einem Punkt verstehen, welcher in Bezug auf unser Koordinatensystem ruht.

2. Insofern *zweitens* das Flächenelement mit der Geschwindigkeit  $v_x, v_y, v_z$  zu Orten fortgetragen wird, an welchen andere Werte  $B_x$  herrschen, beträgt

$$\left( v_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) dt.$$

3. Insofern sich *drittens* die Ebene des Elementes mit der Geschwindigkeit  $\frac{dv_x}{dy}$  um die  $z$ -Achse und mit der Geschwindigkeit  $\frac{dv_x}{dz}$  um die  $y$ -Achse dreht, werden Kraftlinien in das Element aufgenommen, welche ursprünglich demselben parallel waren, es beträgt der Beitrag aus dieser Quelle

$$- \left( B_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dt.$$

4. Endlich vergrößert das Element seinen Inhalt mit der Geschwindigkeit  $\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  und wächst hierdurch die betrachtete Zahl um den Betrag

$$B_x \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dt.$$

Sind die aufgezählten Beiträge sämtlich Null, so ist eine Änderung der betrachteten Zahl nicht möglich, wir haben also die Ursachen der Änderung erschöpft und da sämtliche Beiträge sehr klein sind, so entspricht ihre Summe der Gesamtänderung."

Die ersten beiden Punkte führen zu der vollständigen Ableitung

$$\frac{dB_x}{dt} = \frac{\partial B_x}{\partial t} dt + \left( v_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) dt. \quad (4.7)$$

Aus der Ableitung ergibt sich durch Weglassen der Funktion eine Operatorgleichung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla, \quad (4.8)$$

die wegen der Zusammengehörigkeit des skalaren Produktes  $\mathbf{v} \nabla$  einen reinen skalaren Operator darstellt. Mit der GALILEISchen Geschwindigkeitsaddition  $\mathbf{v} = \mathbf{p} + (\mathbf{v})$  folgt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{p} + (\mathbf{v})) \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{p} \nabla \right) + (\mathbf{v}) \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 + (\mathbf{v}) \nabla. \quad (4.9)$$

Wir sehen hierin die Erklärung der Formel von LORENTZ, wenn die partiellen Ableitungen nach der Zeit die Seiten in der Gleichung wechseln, und wenn man die anderen partiellen Operatoren durch die entsprechenden ersetzt

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1 + \mathbf{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{p} \nabla, \quad (4.11)$$

und weil  $\nabla$  erhalten bleibt, ist auch

$$(\nabla) = \nabla. \quad (4.12)$$

Wir lassen den Index 2 weg, und die beiden entscheidenden Gleichungen sind die forminvarianten (kovarianten) Gleichungen für das ungestrichene und für das gestrichene System

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + (\mathbf{v}) (\nabla). \quad (4.13)$$

Daran liegt der geschickte Trick von LORENTZ in der konsequenten Anwendung der GALILEI-Transformation

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{p} + (\mathbf{v}))_x \frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{p} + (\mathbf{v}))_y \frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{p} + (\mathbf{v}))_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.14)$$

und der Trennung der Gleichung in zwei Teile

$$\frac{d}{dt} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} + \left\{ (\mathbf{v}_x) \frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{v}_y) \frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{v}_z) \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left\{ (\mathbf{v}_x) \frac{\partial}{\partial(x)} + (\mathbf{v}_y) \frac{\partial}{\partial(y)} + (\mathbf{v}_z) \frac{\partial}{\partial(z)} \right\}. \quad (4.16)$$

Der Operator der vollständigen Ableitung  $\frac{d}{dt}$  kann als quadratische Form aufgefasst werden

$$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_x) & (\mathbf{v}_y) & (\mathbf{v}_z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(x)} \\ \frac{\partial}{\partial(y)} \\ \frac{\partial}{\partial(z)} \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{v}_x) & (\mathbf{v}_y) & (\mathbf{v}_z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{p}_x & \mathbf{p}_y & \mathbf{p}_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

und ist forminvariant, also kovariant. Damit kommen jedoch in derselben Gleichung zwei unterschiedliche partielle Zeitableitungen vor, das zunächst schwer zu verstehende Problem der LORENTZ-Transformation. Die mittlere Matrix ist die kontragrediente Matrix der GALILEI-Matrix, was das Geheimnis von LORENTZ zum Teil lüftet

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_x & p_x & p_x \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T. \quad (4.19)$$

Die allgemeine kontragrediente Transformation wird zwar bei den Mathematikern beschrieben, aber leider nicht mit entsprechenden Beispielen hinterlegt, z.B. SMIRNOW [14] und ZURMÜHL [16].

In verkürzter Schreibweise ist die LORENTZsche Invarianten-Transformation

$$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} + \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} = \mathbf{v}\nabla + \frac{\partial}{\partial t} = (\mathbf{v})(\nabla) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (4.21)$$

Unter Vermeidung der Frakturbuchstaben und Klammern schreiben wir besser

$$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' + \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \\ \frac{\partial}{\partial t'} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\nabla' = \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \mathbf{p}\nabla + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.23)$$

oder als Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' + \mathbf{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla f \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' f \\ \frac{\partial f}{\partial t'} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

LORENTZ hat in der Vorstufe zu der nach ihm benannten Transformation eindeutig die GALILEI-Transformation angewendet. Damit ist es notwendig, einen eventuell noch verborgenen Fehler zu suchen.

MAXWELL hat gewusst, dass die vollständige Ableitung nach EULER eine fundamentale Bedeutung in der Physik besitzt. Er hat diese Gleichung an verschiedenen Stellen seines Werkes[11] angewendet. Für LORENTZ bestand offensichtlich keine Notwendigkeit, darauf besonders hinzuweisen.

Man kann aber genauso die GALILEI-Transformation direkt anwenden. Der Operator der vollständigen Ableitung ist

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla. \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{p} + \mathbf{v}')\nabla, \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_x & v'_y & v'_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Ohne MINKOWSKI [12] gibt es bereits in der GALILEI-Transformation einen vierdimensionalen Raum-Zeit-Vektor. Mit der Matrizenregel

$$D = ABC = (AB)C = A(BC) \quad (4.28)$$

ist eigentlich alles gesagt. Wenn dazu noch die partiellen Ableitungen auf eine Funktion  $f$  angewendet werden, lässt sich der Skalar  $D$  invertieren

$$D^T = D = (ABC)^T = C^T B^T A^T, \quad (4.29)$$

$$\frac{df}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

In vielen Fällen sind quadratische Formen aussagekräftiger als Vektorgleichungen. Übrigens kann der Vierer-Vektor mit den Geschwindigkeiten auch an der vierten Stelle eine Systemgeschwindigkeit, z.B. die Schall- oder die Lichtgeschwindigkeit enthalten. Dann entsteht daraus mit  $c/c = 1$

$$\frac{df}{cdt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{p_x}{c} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{p_y}{c} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p_z}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\frac{df}{cdt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{c\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{v_x}{c} + \frac{p_x}{c} \\ \frac{v_y}{c} + \frac{p_y}{c} \\ \frac{v_z}{c} + \frac{p_z}{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{v_x}{c} + \frac{p_x}{c} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{v_y}{c} + \frac{p_y}{c} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{v_z}{c} + \frac{p_z}{c} \right) + \frac{\partial f}{c\partial t} \quad (4.32)$$

$$\frac{df}{cdt} = \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{v_x}{c} + \frac{p_x}{c} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{v_y}{c} + \frac{p_y}{c} \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{v_z}{c} + \frac{p_z}{c} \right) + \frac{\partial f}{c\partial t} \quad (4.33)$$

eine Gleichung mit bezogenen Größen (per unit), die genau der Gleichung (4.15) entspricht. Damit ist die Bemerkung von Einstein [4] S. 29

“Die MAXWELL-LORENTZschen elektromagnetischen Feldgleichungen sind bezüglich GALILEI-Transformationen nicht kovariant.”

nur eine bedeutungsvolle Zweckbehauptung.

## 5 Die Lorentz-Invariante in der Wellengleichung

LORENTZ entwickelt in § 21 die elektromagnetischen Wellengleichungen:

“Aus den Gleichungen (Ia)—(Va) (§ 19) lassen sich auch Formeln ableiten, deren jede nur eine der Grössen  $\mathfrak{d}_x, \mathfrak{d}_y, \mathfrak{d}_z, \mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_y, \mathfrak{h}_z$  enthält.



Zunächst folgt aus (IVa)

$$-4\pi V^2 \text{Rot Rot } \mathfrak{d} = \text{Rot} \left( \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right)_1 = \left( \frac{\partial \text{Rot } \mathfrak{H}}{\partial t} \right)_1.$$

Beachtet man hier das § 4, h Gesagte, sowie die Relationen (Ia), (IIIa) und (4a), so gelangt man zu den drei Formeln

$$V^2 \Delta \mathfrak{d}_x - \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{d}_x}{\partial t^2} \right)_1 = V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1 \{ \rho (\mathfrak{p}_x + \mathfrak{v}_x) \}, \text{ u. s. w... (A)}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$V^2 \Delta \mathfrak{H}_x - \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2} \right)_1 = 4\pi V^2 \left[ \frac{\partial}{\partial z} \{ \rho (\mathfrak{p}_y + \mathfrak{v}_y) \} - \frac{\partial}{\partial y} \{ \rho (\mathfrak{p}_z + \mathfrak{v}_z) \} \right], \text{ u.s.w... (B)}$$

Die letzten Glieder dieser sechs Gleichungen sind vollständig bekannt, sobald man weiss, wie sich die Ionen bewegen."

Ohne in die Einzelheiten der Elektrodynamik zu gehen, lauten die beiden Gleichungen für alle drei Komponenten des Raumes

$$\square \mathfrak{d} = \Delta \mathfrak{d} - \frac{1}{V^2} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial t^2} \right)_1 = \nabla \rho + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1 \left\{ \rho \left( \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{v}}{V} \right) \right\}, \quad (5.1)$$

$$\square \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} = \Delta \frac{\mathfrak{H}}{4\pi} - \left( \frac{\partial^2 \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}}{\partial t^2} \right)_1 = \rho \nabla \times (\mathfrak{p} + \mathfrak{v}). \quad (5.2)$$

Darin sind  $\mathfrak{d}$  die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$ ,  $\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}$  die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  und  $V$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . LORENTZ hat die vollständige Ableitung einer Raum-Zeit-Funktion mit Hilfe der GALILEI-Transformation in zwei Teile zerlegt

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v} \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{p} + \mathfrak{v}') \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{p} \nabla \right) + \mathfrak{v}' \nabla, \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 + \mathfrak{v}' \nabla \quad \text{mit} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{p} \nabla. \quad (5.4)$$

In § 22 schreibt er:

"Wir wollen berechnen, mit welchen Kräften die Ionen aufeinander wirken, wenn sie alle in Bezug auf die ponderable Materie ruhen. In diesem Falle entsteht ein Zustand, wobei in jedem Punkte  $\mathfrak{d}$  und  $\mathfrak{H}$  unabhängig von der Zeit sind. Es wird

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_1 = - \left( \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \dots\dots (19)$$

und es reduzieren sich die Gleichungen (A) und (B), wenn man der Kürze halber die Operation

$$\Delta - \frac{1}{V^2} \left( \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2$$

durch  $\Delta'$  angibt, auf

$$\Delta' \mathfrak{d}_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \left( \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \text{ u.s.w.,... (A')}$$

und

$$\Delta' \mathfrak{H}_x = 4\pi \left( \mathfrak{p}_y \frac{\partial \rho}{\partial z} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial \rho}{\partial y} \right), \text{ u.s.w..... (B)'}$$

Nach den beiden Zitaten brauchen wir nur die LORENTZ-Invariante

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 + \mathbf{p}\nabla \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 - \mathbf{p}\nabla \quad (5.5)$$

zu substituieren. Dann lauten die linken Seiten der Wellengleichungen als Operatoren

$$\square = \Delta - \frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)_1 = \left[\nabla + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1\right] \left[\nabla - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1\right] \quad (5.6)$$

und nach der Substitution

$$\square = \left[\nabla + \frac{1}{V} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 - \mathbf{p}\nabla \right\}\right] \left[\nabla - \frac{1}{V} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 - \mathbf{p}\nabla \right\}\right]. \quad (5.7)$$

Im Ruhezustand muss dann  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 = 0$  werden, und wir erhalten

$$\square = \left[\nabla - \frac{1}{V} \mathbf{p}\nabla\right] \left[\nabla + \frac{1}{V} \mathbf{p}\nabla\right] = \nabla^2 - \left(\frac{\mathbf{p}}{V}\right)^2 \nabla^2, \quad (5.8)$$

$$\square = \left[\left(1 + \frac{\mathbf{p}}{V}\right) \nabla\right] \left[\left(1 - \frac{\mathbf{p}}{V}\right) \nabla\right] = \begin{pmatrix} V & & & \\ & \mathbf{p}_x & & \\ & & \mathbf{p}_y & \\ & & & \mathbf{p}_z \end{pmatrix} \left[\frac{1}{V} \nabla\right]^2 \quad (5.9)$$

oder den Schlüssel zur LORENTZ-Transformation

$$\square = \left(1 - \left(\frac{\mathbf{p}}{V}\right)^2\right) \nabla^2 = \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{p}}{V}\right)^2} \nabla\right]^2. \quad (5.10)$$

Das ist die Wellengleichung mit den Faktoren des Doppler-Effekts bei Annäherung bzw. Entfernung des Beobachters von der ruhenden Signalquelle.

LORENTZ hatte  $(\mathbf{v}) = 0$  und damit  $\mathbf{p} = \mathbf{v}$  gesetzt. Das schränkt die Gültigkeit seiner Transformation ein. Deshalb wird in [9] in den weiteren Kapiteln der klassische DOPPLER-Effekt [1] auch richtig beschrieben.

Das scheint soweit alles richtig zu sein bis auf die Vergewaltigung des antisymmetrischen dritten binomischen Lehrsatzes zum Satz des PYTHAGORAS

$$(c + a)(c - a) = c^2 - a^2 = b^2. \quad (5.11)$$

Die EINSTEINSche Grenze der Geschwindigkeiten ist ein Phasensprung, den bereits SOMMERFELD [15] 1905 im LORENTZ-Jubelband theoretisch begründete, und der in Analogie zur MACHSchen Zahl Eins beim Schall (Schallmauer) von dem Nobelpreisträger TSCHERENKOW im Jahr 1934 praktisch nachgewiesen wurde.

## Literatur

- [1] DOPPLER, Chr.: Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Erscheinungen der Gestirne des Himmels. In: *Abh. d. kgl.-böhm. Ges. d. Wissensch.* V (1842), S. 19
- [2] EINSTEIN, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921
- [3] EINSTEIN, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

- [4] EINSTEIN, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Springer-Verlag, 1922. – 7. Auflage 2009
- [5] EINSTEIN, Albert ; SIMON, Dieter (Hrsg.): *Albert Einstein: Akademie-Vorträge*. WILEY-VCH Verlag, 2006. – 431 S.
- [6] FEYNMAN, Richard P.: *Vorlesungen über Physik II*. 3. Ausgabe. Oldenbourg, 2001
- [7] HERTZ, H.: Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper. In: *Annalen der Physik und Chemie* 41 (1890), Nr. H. 11, S. 369–399
- [8] LORENTZ, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*. E. J. BRILL, 1892
- [9] LORENTZ, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*. E. J. BRILL, 1895(2005)
- [10] LORENTZ, H.A.: Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.. In: *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften V.2* (1904), S. 145–288
- [11] MAXWELL, J. C.: *A treatise on electricity and magnetism*. Bd. 1 a. 2. Clarendon Press, 1873
- [12] MINKOWSKI, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember
- [13] SCHMUTZER, Ernst: *Grundlagen der Theoretischen Physik*. Bd. I u. II. WILEY-VCH, 2005
- [14] SMIRNOW, W.I.: *Lehrgang der höheren Mathematik*. Bd. III/1. 12. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1985
- [15] SOMMERFELD, A.: Simplified Deduction of the Field and the Forces of an Electron, moving in any giving way. In: *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences VII* (1905), Nr. 1, S. 346–367
- [16] ZURMÜHL, R. ; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen 1 - Grundlagen*. 6. Auflage. Springer-Verlag, 1992